МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)**

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА» И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ИХ ВЫПОЛНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Предназначено для студентов 2-го курса заочной формы обучения по направлению
09.03.03 Прикладная информатика

Ростов-на-Дону

2022

Составитель: Бедоидзе М.В.

В учебно-методическом пособии излагаются основные понятия теории вероятностей и математической статистики. Предложено большое количество примеров, поясняющих основные положения теоретического курса. Представлены варианты индивидуальных заданий контрольных работ, выполняемых студентами заочной формы.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Правило выбора варианта.

Номер варианта студент выбирает согласно порядковому номеру в журнале группы. Если порядковый номер в журнале больше 20, то номер выбирается сначала, т.е. порядковый номер 21 - номер варианта - 1, порядковый номер 22 - номер варианта - 2 и т.д.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Раздел I. *Классическое определение вероятности*

1. 12 студентов, среди которых Иванов и Петров, случайным образом занимают очередь за учебниками в библиотеке. Какова вероятность, что между Ивановым и Петровым в образовавшейся очереди окажутся ровно 5 человек?
2. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 5 цифр. Чему равна вероятность, что в нем все цифры кратные 3?
3. Бросаются две игральные кости. Чему равна вероятность того, что сумма выпавших очков не превзойдет пяти?
4. В доме 9 этажей. На 8 из них можно подниматься на лифте. В лифт вошло 4 человека. Какова вероятность того, что все они выйдут на разных этажах?
5. Телефонный номер состоит из 6 цифр. Какова вероятность того, что в нем все цифры различные?
6. В ящике лежат 10 заклепок, отличающихся друг от друга только материалом: 5 железных, 3 латунных и 2 медных. Наугад берут две заклепки. Какова вероятность того, что они будут из одного материала?
7. Из 15 билетов выигрышными являются 4. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу шести билетов будут 2 выигрышных?
8. 7 книг на одной полке расставляются наудачу. Определить вероятность того, что при этом три определенные книги окажутся поставленными рядом.
9. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку отбирается 9 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов окажутся 5 отличников.
10. Наудачу выбирается пятизначное число. Какова вероятность, что оно состоит из нечетных цифр?
11. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Одновременно из урны извлекают два шара. Какова вероятность того, что они будут разных цветов.
12. На семи карточках написаны буквы Д, Е, Н, С, Т, Т, У. Перемешав карточки, извлекают их одну за другой и кладут в порядке извлечения. Определить вероятность того, что получится слово «СТУДЕНТ».
13. Группа, состоящая из 8 человек, занимает места на скамейке. Найти вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом, если число мест равно 8.
14. 10 вариантов контрольной работы написаны на отдельных карточках. Карточки перемешиваются и распределяются случайным образом среди 5 студентов, сидящих в одном ряду. Найти вероятность того, что варианты 1 и 2 достанутся рядом сидящим студентам.
15. Из группы студентов, в которую входят 7 первокурсников, 3 второкурсника и 6 третьекурсников выбирается 5 человек. Найти вероятность, что будут выбраны 2 первокурсника, 1 второкурсник и 2 третьекурсника.

16. В конверте среди 100 фотокарточек находится одна нужная. Наудачу извлекают 10 фотокарточек. Найти вероятность того, что среди них нужная.

17. Четырехтомное сочинение расположено на полке в случайном порядке. Найти вероятность того, что тома стоят в должном порядке справа налево или слева направо.

18. На карточках написаны буквы К, Р, У, К, З, У, А, У. Перемешав карточки, извлекают их одну за другой и кладут в порядке извлечения. Определить вероятность того, что получится слово «КУКУРУЗА».

19. В цехе работают 12 мужчин и 8 женщин. По табельным номерам наудачу отобраны 10 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 5 женщин.

20. В ящике 10 теннисных мячей, среди которых 5 игранных и 5 неигранных. Из ящика наудачу берут 3 мяча. Найти вероятность того, что все три мяча неигранные.

Раздел II. *Теоремы сложения и умножения вероятностей*

1. Три стрелка сделали по выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0.6, для второго 0.8 и для третьего - 0.9. Какова вероятность того, что в мишень попали ровно две пули?

2. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что в течения смены потребует его внимания первый станок, равна 0.7; второй - 0.6; третий - 0.55. Найти вероятность того, что в течение смены потребуют внимания рабочего какие-нибудь два станка.

3. В первой урне 1 белый и 4 черных шара, во второй - 2 белых и 3 черных, в третьей - 3 белых и 4 черных шара. Из каждой урны взяли по шару. Какова вероятность того, что среди вынутых шаров будет 1 белый и 2 черных шара?

4. Два стрелка делают по одному выстрелу в цель. Вероятность попадания для первого стрелка ровна 0.7, для второго - 0.8. Найти вероятность того, что в цель попадет только один стрелок.

5. Вероятность того, что книга имеется в фондах первой библиотеки, равна 0.5, во второй - 0.7 и с третьей- 0.4. Определить вероятность того, что книга имеется в фондах хотя бы одной библиотеки.

6. Производится трехкратное бросание игральной кости. Определить вероятность того, что 6 очков выпадут один раз.

7. Два станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок проработает смену без накладки равна 0.9, а второй - 0.8. Какова вероятность того, только один станок проработает смену без накладки.

8. В первой урне 3 белых и 4 чёрных шара, во второй 5 белых и 6 чёрных, в третьей 3 белых и 5 чёрных. Из каждой урны наудачу извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что из них хотя бы один белый?

9. Для сигнализации об аварии установлены два сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор равна 0.9, второй - 0.8. Найти вероятность того, что при аварии не сработает сигнализация.

10. Студент разыскивает нужную формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула находится в первом справочнике 0.4; во втором - 0.5; в третьем - 0.6. Найти вероятность того, что формула будет найдена.

11. Прибор, работающий в течение суток, состоит из трех узлов, каждый из которых независимо от других может за это время выйти из строя. Неисправность хотя бы одного узла

приводит к отказу прибора в целом. Вероятность безотказной работы первого узла 0.9; второго 0.8; третьего – 0.7. Найдите вероятность того, что прибор откажет.

12. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что первый станок выйдет из строя равна 0.1.; второй – 0.2; третий – 0.15. Найти вероятность того, что только один станок потребует наладки.

13. В одной урне 4 белых и 5 черных шаров, во второй урне 3 белых и 4 черных шара, в третьей урне 4 белых и 4 черных шара. Из каждой урны вынули по одному шару. Какова вероятность, что среди вынутых шаров окажется два белых.

14. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и набирает её наудачу. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в два места.

15. Издательство отправило газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в каждое почтовое отделение – 0.8. Найти вероятность того, что только два отделения получат газеты вовремя.

16. На стройке 3 крана. Вероятность безотказной работы первого крана в течение рабочего дня равна 0,3, второго – 0,5, третьего – 0,8. Найти вероятность того, что в течение рабочего дня безотказно будет работать хотя бы один кран.

17. Два стрелка производят по одному выстрелу в мишень. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0,2, вторым – 0,8. Найти вероятность того, что хотя бы один стрелок поразит мишень.

18. При изготовлении детали заготовка должна пройти три операции. Проявление брака на отдельных операциях - независимые события. Найти вероятность изготовления стандартной детали, если вероятность брака на первой операции 0.02; на второй - 0.01; на третьей - 0.03.

19. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что станок потребует в течение рабочего дня ремонта, для первого станка равна 0,1, для второго –0,2, для третьего – 0,3. Найти вероятность того, что в течение рабочего дня ни один из станков не потребует ремонта.

20. Два стрелка производят по одному выстрелу в мишень. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0,35, вторым – 0,6. Найти вероятность того, что мишень поразит только один стрелок.

Раздел III. *Полная вероятность. Формулы Байеса*

1. Известно, что 90% изделий стандартно. Упрощенный контроль признает годной стандартную продукцию с вероятностью 0.8 и нестандартную с вероятностью 0.2.Наудачу взятая деталь признана годной. Определить вероятность того, что деталь стандартна.

2. В ящике находится 12 новых теннисных мячей и 8 игранных. Из ящика наугад вынимают два мяча, которыми играют. После этого мячи возвращают в ящик. Через некоторое время из ящика снова берут мяч. Найти вероятность, что он будет новым.

3. Из 10 деталей 4 окрашены. Вероятность того, что окрашенная деталь тяжелее нормы - равна 0.2, неокрашенная – 0.1. Взятая наугад деталь оказалась тяжелее нормы. Найти вероятность того, что она окрашена.

4. Вероятность обнаружения заболевания K у больного этим заболеванием 0.9. Вероятность принять здорового человека за больного 0.2. Доля больных заболеванием K – 0.1. Человек признан больным. Найти вероятность, что произошла ошибка.

5. В группе 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить норму лыжника – 0.9; велосипедиста – 0.8 и бегуна – 0.75. Спортсмен, выбранный наудачу, выполнил норму. Найти вероятность того, что это велосипедист.

6. При разрыве снаряда образуются крупные, средние и мелкие осколки, причем число крупных осколков составляет - 0.1 от общего числа, число средних – 0.3 и мелких – 0.6. При попадании в танк крупный осколок пробивает броню с вероятностью 0.9; средний – 0.3; а мелкий с вероятностью – 0.1. Осколок пробил броню. Найти вероятность того, что это средний осколок.

7. На сборку поступают однотипные изделия из 4 цехов. Вероятности брака в каждом из цехов соответственно равны 0.04; 0.03; 0.06 и 0.02. Первый цех поставляет 30, второй – 20, третий – 50 и четвертый – 25 изделий. Какова вероятность, что взятое наудачу изделие окажется бракованным?

8. По линии связи передают два сигнала A и B соответственно с вероятностями 0.8 и 0.2. Из-за помех 15% сигналов A искажаются и принимаются как сигналы B, а 12% переданных сигналов B принимаются как сигналы A. Найти вероятность того, что при приеме появится сигнал A.

9. Станок может работать в двух режимах: рентабельном и нерентабельном. Рентабельный режим наблюдается в 75% случаев. При работе станка в рентабельном режиме его остановка может произойти с вероятностью 0,2, в нерентабельном – с вероятностью 0,4. Какова вероятность остановки станка?

10. Для покупки нужной вещи хозяйка может пойти в один из трех магазинов. Вероятность, что нужная вещь окажется в I магазине – 0.4; для II магазина эта вероятность – 0.7, для III – 0.8. Хозяйка купила вещь. Какова вероятность, что она посетила III магазин?

11. Ожидается прибытие трех судов с бананами. Вероятности того, что груз испортится на судне, равны: 0.01; 0.2; 0.3. Груз пришел испорченным. Найти вероятность, что испорченный груз прибыл на первом судне.

12. Грузовых машин, проезжающих по шоссе, 60%; легковых машин, проезжающих по тому же шоссе 40%. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, 0.1; легковая – 0.2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того. Что это грузовая машина.

13. Литье в болванках поступает из двух цехов. Из первого цеха – 70%, из второго цеха – 30%, причем в первом цехе 10% брака, а во втором – 20%. Наудачу взятая болванка оказалась без дефекта. Найти вероятность, что она из первого цеха.

14. В группе 5 лыжников, 10 велосипедистов, 5 пловцов. Вероятность выполнить норму для лыжника – 0.7; для велосипедиста – 0.8; для пловца – 0.9. Определить вероятность, что наудачу взятый спортсмен выполнит норму.

15. На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит 25%, вторая – 35%, третья – 40% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 5%, 4% и 2%. Какова вероятность того, что случайно выбранный болт окажется дефектным?

16. По линии связи передаются два сигнала A и B соответственно с вероятностями 0.84 и 0.16. Из-за помех 1/6 сигналов A искажается и принимается как сигналы B, а 1/8 часть переданных сигналов B принимается как сигнал A. Требуется найти вероятность, что передан сигнал A, если он же и принят.

17. Из 20 деталей 15 окрашены. Вероятность того, что окрашенная деталь тяжелее нормы 0.2, неокрашенная – 0.4. Определить вероятность того, что наудачу взятая деталь тяжелее нормы.

18. В приемнике имеется 20 радиолам п двух типов: 12 ламп первого типа и 8 ламп второго типа. Вероятность выхода из строя за время T для каждой лампы первого типа равна 0.03, для лампы второго типа – 0.05. За время T приемник вышел из стоя. Найти вероятность, что отказала лампа второго типа.

19. На сборку поступают однотипные изделия из 5 цехов. Вероятности брака в каждом из цехов соответственно равны 0.04, 0.03, 0.06, 0.05 и 0.02. Первый цех поставляет 60, второй – 20,

третий – 30, четвёртый – 40 и пятый 50 изделий. Какова вероятность, что взятое наудачу изделие окажется бракованным?

20. Известно, что 95% продукции стандартно. Контроль признает стандартную продукцию годной с вероятностью 0.9 и нестандартную – с вероятностью 0.15. Наудачу взятая деталь признана годной. Определить вероятность того, что деталь стандартна.

Раздел IV. *Схема Бернулли. Предельные теоремы в схеме Бернулли*

1. 500 человек опрашивают о дне рождении. Какова вероятность, что ровна 2 человека родились в один день.
2. Кубик бросают 7 раз. Какова вероятность, что шестерка выпадет 3 раза.
3. Монета брошена 20 раз. Найти вероятность того, что число выпадений «герба» будет заключено между числами 12 и 16.
4. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.
5. Вероятность появления события в каждом из 17 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится в большинстве испытаний.
6. Найти вероятность того, что событие A наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.
7. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.
8. Монета брошена 20 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет ровно 10 раз.
9. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,3. Куплено 10 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.
10. Вероятность сбоя в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,003. Поступило 1000 вызовов. Определить вероятность 7 сбоев.
11. В лотерее вероятность выигрыша, приходящаяся на один билет равна 0,05.Найти вероятность выигрыша 25 билетов из 1000.
12. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 0,1. Какова вероятность того, что лицо, имеющее 100 билетов, выиграет по 10 билетам?
13. Вероятность сбоя в работе телефонной станции при каждом вызове в праздничный день равна 0,005. Поступило 1000 вызовов. Определить вероятность того, что было не более трех сбоев.
14. Станок штампует детали. Вероятность появления бракованной детали 0,01. Какова вероятность, что среди 200 деталей не более 2 бракованных.
15. Завод отправил на базу 5000 изделий. Вероятность повреждения изделия при перевозке 0,0001. Какова вероятность доставить на базу 5 поврежденных изделий.
16. Монету бросают 25 раз. Какова вероятность, что река выпадет не более 2 раз.
17. Вероятность того, что изготовленная деталь не попала на сборку равна 0,2. Какова вероятность, что из 450 деталей на сборку не попало от 50 до 100 деталей.
18. Игральная кость бросается 17 раз. Найти наивероятнейшее число появления числа очков, кратным трем.
19. В тире стрелок проводит 9 выстрелов по мишени с вероятностью попадания каждого 0,7. Какова вероятность того, что стрелок попадет ровно 4 раза.
20. Вероятность того, что при броске мяча баскетболист попадёт в корзину, равна 0,2. Найти наивероятнейшее число попаданий при 7 бросках и соответствующую вероятность.

Раздел V. *Функции распределения и плотности распределения вероятностей. Числовые характеристики случайных величин*

1. В коробке 10 электроламп, из которых 2 нестандартные. Составить закон распределения числа стандартных ламп среди двух случайно отобранных. Записать функцию распределения $F(x)$ и построить ее график. Вычислить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.
2. Случайная величина X задана законом распределения:

X	1	3	5	9
P	0,2	p_2	0,4	0,3

Вычислить p_2. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график. Найти математическое ожидание $M(X)$ и среднеквадратическое отклонение случайной величины $\sigma(X)$.

3. Непрерывная случайная величина задана плотностью вероятности

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ C(x-3), & 3 \le x \le 5 \\ 0, & x > 5 \end{cases}$$

Определить постоянную C, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$ и вероятность попадания в интервал [3.5, 4].

4. В урне 5 белых и 6 черных шаров. Составить закон распределения случайной величины, равной числу белых шаров среди двух шаров, взятых наудачу из урны. Записать функцию распределения $F(x)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.
5. Случайная величина X задана законом распределения:

X	-1	0	2	5
P	0,5	0,1	p_3	0,1

Вычислить p_3. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график. Найти математическое ожидание $M(X)$ и среднеквадратическое отклонение случайной величины $\sigma(X)$.

6. Непрерывная случайная величина задана плотностью вероятности

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ C(x+2), & 0 \le x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Определить постоянную C, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$ и вероятность попадания в интервал [1, 2].

7. В партии из 10 деталей имеется 6 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных. Записать функцию распределения $F(x)$ и построить ее график. Вычислить математическое ожидание $M(X)$ и

дисперсию $D(X)$.

8. Случайная величина X задана законом распределения:

X	2	3	5	9
P	p_1	0,3	0,2	0,1

Вычислить p_1. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график. Найти математическое ожидание $M(X)$ и среднеквадратическое отклонение случайной величины $\sigma(X)$.

9. Непрерывная случайная величина задана функцией распредления

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ C(x-2), & 2 \le x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Определить постоянную C, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, плотность $p(x)$ и вероятность попадания в интервал [2.1, 2.4].

10. На пути движения поезда 5 светофоров, каждый из которых с вероятностью 0.5 либо запрещает, либо разрешает дальнейшее движение. Найти закон распределения случайной величины – числа светофоров, пройденных поездом до первой остановки перед светофором. Вычислить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

11. Случайная величина X задана законом распределения:

X	0	4	7	8
P	0,2	0,5	0,2	p_4

Вычислить p_4. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график. Найти математическое ожидание $M(X)$ и среднеквадратическое отклонение случайной величины $\sigma(X)$.

12. Непрерывная случайная величина задана функцией распредления

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ C(x-1)^2, & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Определить постоянную C, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, плотность $p(x)$ и вероятность попадания в интервал [1.5, 1.8].

13. Устройство состоит из 4 блоков. Вероятность отказа в одном испытании для каждого блока 0.3. Составить закон распределения случайной величины – числа отказавших блоков при одном испытании. Найти закон распределения случайной величины – числа светофоров, пройденных поездом до первой остановки перед светофором. Вычислить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

14. Случайная величина X задана законом распределения:

X	-2	0	2	5
P	0,1	p_2	0,2	0,1

Вычислить p_2. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график. Найти математическое ожидание $M(X)$ и среднеквадратическое отклонение случайной величины $\sigma(X)$.

15. Непрерывная случайная величина задана функцией распредления

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ Cx^2+2x, & 0<x\le 1/3 \\ 1, & x>1/3 \end{cases}$$

Определить постоянную C, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, плотность $p(x)$ и вероятность попадания в интервал [0.25, 0.3].

16. Две игральные кости одновременно бросают 2 раза. Найти закон распределения числа выпадения четного числа очков на двух игральных костях. Вычислить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

17. Случайная величина X задана законом распределения:

X	3	5	7	9
P	0,3	p_2	0,2	0,1

Вычислить p_2. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график. Найти математическое ожидание $M(X)$ и среднеквадратическое отклонение случайной величины $\sigma(X)$.

18. Непрерывная случайная величина задана плотностью вероятности

$$p(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ Cx+2, & 0\le x\le 1/3 \\ 0, & x>1/3 \end{cases}$$

Определить постоянную C, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения $F(x)$ и вероятность попадания в интервал [0.1, 0.3].

19. В урне 10 белых и 6 черных шаров. Из урны наудачу извлекают 3 шара. Найти закон распределения случайной величины – числа белых шаров среди извлеченных. Вычислить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

20. Случайная величина X задана законом распределения:

X	1	2	3	4
P	0,1	0,2	p_3	0,5

Вычислить p_3. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график. Найти математическое ожидание $M(X)$ и среднеквадратическое отклонение случайной величины $\sigma(X)$.

Раздел VI. *Выборка, её числовые характеристики*

Для указанных ниже статистических распределений выборок требуется:

1) Найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график.

2) Построить полигон частот.

3) Вычислить выборочную среднюю.

4) Вычислить выборочную и исправленную дисперсии.

1.

X	2	5	7
P	1	3	5

2.

X	1	3	7	9
P	6	4	3	2

3.

X	3	6	9
P	5	15	10

4.

X	-4	2	3	5
P	3	6	4	2

5.

X	10	15	25
P	11	14	16

6.

X	2	6	10	12
P	1	2	4	1

7.

X	2	4	8
P	10	12	14

8.

X	1	5	6	8
P	5	15	20	10

9.

X	1	4	6
P	10	12	25

10.

X	1	5	7	9
P	6	12	1	1

11.

X	4	7	8
P	5	2	3

12.

X	-4	1	3	5
P	4	3	1	2

13.

X	2	3	4
P	10	18	20

14.

X	1	2	4	7
P	1	3	6	2

15.

X	4	7	8
P	5	2	3

16.

X	1	5	7	9
P	6	14	19	9

17.

X	2	5	6
P	10	15	20

18.

X	0	1	2	3
P	5	2	1	1

19.

X	3	5	8
P	4	14	8

20.

X	-2	1	2	5
P	3	1	4	7

1. Элементы комбинаторики

Общие правила комбинаторики.

Рассмотрим k множеств M_1, M_2, M_3, …, $M_к$, содержащих по m_1, m_2, m_3,…, $m_к$ элементов соответственно. Выбирается по одному элементу из каждого множества и составляется еще одно множество. Число способов, которыми можно выбрать по одному элементу из каждого множества, равно произведению $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_к$. В этом и состоит основной *принцип произведения* комбинаторики.

В задачах теории вероятностей часто рассматриваются различные соединения (комбинации) k элементов из множества, содержащего n элементов ($k \le n$). Будем рассматривать такие соединения, в которые каждый элемент данного множества может входить не более одного раза, то есть соединения без повторений. Рассмотрим три вида соединений: размещения, перестановки, сочетания.

Определение. *Размещениями* из n элементов по k элементов называются наборы k элементов, отличающиеся один от другого или самими элементами (составом элементов), или их порядком. Число размещений обозначается A_n^k.

Число размещений из n элементов по k элементов находится по формуле:

$$\boxed{\mathbf{A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}}. \qquad (1)$$

Определение. *Перестановками* из данных n элементов называются наборы из n элементов, различающихся только порядком.

Перестановки – это частный случай размещений. Число всех перестановок обозначают символом P_n. Число P_n найти несложно. Для этого в формулу (1) подставляем k=n.

$$\boxed{\mathbf{P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!}}$$

Определение. Произведение n первых натуральных чисел называется *факториалом* числа n и обозначается символом n!(читается «эн факториал»).

$$\boxed{\mathbf{P}_n = \mathbf{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n = n!}} \qquad (2)$$

Приведем некоторые значения факториала:

$0!=1$,	$5!= 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$,
$1!=1$,	$6!= 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=720$,
$2!=1\cdot2=2$,	$7!= 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7=5040$,
$3!=1\cdot2\cdot3=6$,	$8!= 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8=40320$,
$4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$,	$9!= 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9=362880$.

Определение. *Сочетаниями*, содержащими k элементов, выбранных из n элементов заданного множества, называются всевозможные наборы k элементов, различающиеся хотя бы одним элементом. Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначают C_n^k или $\binom{n}{k}$.

Число сочетаний из n элементов по k элементов определяется формулой:

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Примеры решения задач.

1. Определить, сколько трехзначных чисел можно составить из множества цифр 7,8,9,3,2 без повторений.

Решение. Трехзначные числа можно рассматривать как размещения, так как при замене одной цифры другой или перестановке их местами получаются разные числа. Так как n=5, k=3, то различных чисел будет:

$$A_5^3 = 5\cdot4\cdot3=60.$$

2. К кассе за получением (или для уплаты) денег подошли одновременно 4 человека. Сколькими способами они могут выстроиться в очередь?

Решение. Очередь состоит из 4 различных лиц, поэтому в каждом способе составления очереди учитывается порядок их расположения. Таким образом, имеют место перестановки из четырёх человек, их число равно:

$P_4 = 4! = 24$.

3.В цехе 18 человек, из них 10 мужчин. На конференцию отбирают 6 человек так, что было 3 мужчины и 3 женщины. Сколько различных списков можно составить?

Решение. 3-х мужчин из 10 человек можно отобрать C_{10}^{3} различными способами, 3-х женщин из 8 можно отобрать C_8^3 различными способами. Следовательно, 3-х женщин и 3-х мужчин можно отобрать $C_{10}^{3} \cdot C_8^3$– различными способами.

Найдем: $C_{10}^{3} = \dfrac{10!}{3!7!} = \dfrac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7!} = 120$,

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5!} = 54.$$

Итого, число различных списков:

$C_{10}^{3} \cdot C_8^3 = 120 \cdot 54 = 6480$.

§2. Основные понятия теории вероятностей

Определение. Результат некоторого опыта или эксперимента, который нельзя заранее предсказать назовем *случайным событием*.

События обозначаются большими латинскими буквами: A, B, C,…

Примеры наиболее часто встречающихся испытаний и событий приведены в таблице.

Определение. *Достоверным* назовем событие, которое обязательно произойдет в результате опыта.

Например, из урны с 20 красными шарами обязательно будет вынут красный шар.

Определение. *Невозможным* назовем событие, которое заведомо не произойдет в результате опыта.

Например, из урны с 20 красными шарами не будет вынут зеленый шар.

Испытания	События
1. Бросание монеты.	1. Выпал герб (орёл); выпала цифра (решка).
2. Бросание игральной кости.	2. Выпало 5 очков; выпало 3 очка; выпало чётное число очков; выпало не менее 3-х очков, ...
3. Извлечение карты из колоды.	3. Извлекли бубновую карту; достали туза; вытащили даму пик; извлекли не старше дамы, …
4. Извлечение шара из урны.	4. Извлекли белый шар; извлекли зелёный шар; вытащили шар с номером 2; …
5. Стрельба по мишени.	5. Попадание, промах; выбито 9 очков, …
6. Учащийся отвечает на вопросы теста.	6. Правильно ответил на все вопросы; на половину вопросов; хотя бы на один вопрос, …
7. Сажаются семена томата определённого сорта.	7. Взойдут 9 семян; все взойдут; взойдет не менее 5 семян, …
Очевидно, что ряд таких примеров можно продолжать долго. В разряд испытаний можно отнести процессы, с которыми сталкиваемся достаточно регулярно, например: наблюдение за погодой (здесь событиями являются – ясный день, дождь, снег, ветер и т.д.); выход на работу в определенный день (приход на работу вовремя; опоздание; отгул и т.д.); нахождение в неблагоприятных условиях, при которых можно получить некоторое заболевание (заразиться гриппом; простыть на сквозняке; получить профзаболевание или травму на производстве и т.д.)	

Определение. События А и В называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого, в противном случае события называются *совместными*.

Рассмотрим пример. События: А – из колоды вынута крестовая карта, В – из колоды вынута бубновая карта, D – из колоды вынута дама.

События А и В – несовместные. События А и D – совместные, так как из колоды может быть вынута дама крестей, в этом случае произойдет и событие А – крестовая карта, и событие D – дама.

Определение. События A и $\overline{A}$ называются *противоположными*, если событие $\overline{A}$ происходит всякий раз, когда не происходит событие A и наоборот.

Например, событие A– выпал герб при бросании монеты и событие $\overline{A}$– выпала цифра– противоположное.

Определение. События называются *равновозможными*, если нет основания считать, что одно из них произойдет скорее, чем другое.

Определение. *Элементарными* событиями назовем все результаты испытания, которые являются попарно несовместными и равновозможными. Те элементарные события, в которых наступает событие А, назовем *благоприятствующими* появлению события А.

Определение. *Вероятностью* события А (обозначается **Р(А)**) называется отношение числа m благоприятствующих исходов к общему числу n элементарных исходов опыта (классическое определение вероятности).

Итак, вероятность события А определяется формулой:

$$\boxed{\mathbf{P(A)}=\frac{m}{n}},$$

где m – число элементарных событий, благоприятствующих событию А, n – число всех элементарных исходов испытания.

Например, в урне 10 красных и 7 зеленых шаров, достаем 1 шар. Рассмотрим события: A – из урны вынут красный шар, B – из урны вынут зеленый шар. Найдём вероятности этих событий.

Решение: всего в урне 17 шаров, тогда n = 17. Благоприятствующими исходами для события A будет извлечение любого из 10 красных шаров, то есть m = 10, таким образом $P(A)=\frac{10}{17}$; аналогично, $P(B)=\frac{7}{17}$.

Пример. На конференцию из группы студентов из 20 человек (8 девушек, 12 юношей) отбирают 5 человек. Найти вероятность следующих событий:

A – среди отобранных студентов одни юноши,

B – среди отобранных студентов одни девушки,

C – среди отобранных 2 девушки и 3 юношей.

Решение. Заметим, что общее число исходов для всех трех событий будет одинаковым $n= C_{20}^{5}$.

Число благоприятствующих исходов: $m_A = C_{12}^{5}$, $m_B = C_{8}^{5}$, $m_C = C_{8}^{2} \cdot C_{12}^{3}$.

Следовательно, получаем вероятность появления события A:

$$P(A)=\frac{m_A}{n} = \frac{C_{12}^{8}}{C_{20}^{5}} = \frac{12!}{5!\cdot 7!} : \frac{20!}{5!\cdot 15!} = \frac{12!\cdot 5!\cdot 15!}{5!\cdot 7!\cdot 20!} =$$

$$= \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 15!}{7!\cdot 15!\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20} = \frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20} = 0{,}051.$$

Найдем вероятность появления события B.

$$P(B)=\frac{m_B}{n} = \frac{C_8^5}{C_{20}^5} = \frac{8!\cdot 5!\cdot 15!}{5!\cdot 3!\cdot 20!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 15!}{3!\cdot 15!\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20} = \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20} =0{,}006$$

Аналогично получаем:

$$P(C)=\frac{m_C}{n}=\frac{C_8^2\cdot C_{12}^3}{C_{20}^5}=\frac{8!\cdot 12!\cdot 5!\cdot 15!}{2!\cdot 6!\cdot 3!\cdot 9!\cdot 20!}=\frac{7\cdot 8\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 3!\cdot 4\cdot 5\cdot 15!}{2!\cdot 6!\cdot 3!\cdot 9!\cdot 15!\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}=$$

$$=\frac{7\cdot 8\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}=0{,}0795.$$

Заметим, что вероятность достоверного события равна 1, а вероятность невозможного равна 0. Вероятность случайного события А заключена между 0 и 1. Итак, для любого события верно неравенство: $\mathbf{0 \le P(A) \le 1}$.

§3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Определение. *Суммой* А + В двух событий А и В называют событие, состоящее в появлении события А или события В, или обоих этих событий.

В частности, если события А и В несовместные, то А + В – событие, состоящее в появлении только одного из этих событий.

Определение. *Суммой нескольких событий* называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий.

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий.

$$\boxed{\mathbf{P(A + B) = P(A) + P(B)}}.$$

Следствие: вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий.

$$\boxed{\mathbf{P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)}}$$

Пример. В ящике 15 деталей, среди которых 5 окрашенных. Сборщик наудачу достает 3 детали. Найти вероятность того, что из трех взятых деталей окрашенной окажется хотя бы одна деталь.

Решение. Требование – хотя бы одна из трёх деталей окрашена – будет осуществлено, если произойдет любое из следующих 3 несовместных событий: B – одна деталь из трех окрашена, C – две детали из трех окрашены, D – три детали окрашены. Интересующее нас событие A можно представить в виде суммы событий: A = B + C + D, и по теореме о вероятности суммы несовместных событий получаем

P(A) = P(B) + P(C) + P(D).

$$P(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{45}{91} = 0{,}495;$$

$$P(C) = \frac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{20}{91} = 0{,}220;$$

$$P(D) = \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{2}{91} = 0{,}022;$$

тогда $P(A) = P(B) + P(C) + P(D) = \frac{45}{91} + \frac{20}{91} + \frac{2}{91} = \frac{67}{91} = 0{,}736.$

(Если сложить числа 0,495, 0,220 и 0,022, то получится 0,737, что не равно 0,736. Погрешность получается в результате округлений.)

<u>Определение</u>. Два события A и B называются *независимыми*, если вероятность появления одного из них не меняется от появления или непоявления другого и наоборот.

Пример. Рассмотрим две урны с шарами. В каждой урне по 5 красных и 6 синих шаров. Из каждой урны один за другим вынимаются два шара, но в первой урне шары возвращаются (урна с возвратом), а во второй урне не возвращаются (урна без возврата). Рассмотрим событие A – второй вынутый из урн шар красный. В первом случае (с возвратом) вероятность события A не зависит от того каким был вынут первый шар (красный или синий), а во второй урне (без возврата) вероятность события А зависит от того, какой был вынут первый шар (красный или синий).

Условную вероятность появления события В при условии, что произошло событие А обозначим символом:

$P_B(A)$ или $P(A/B)$.

Определение. *Произведением* двух событий А и В называют событие $A \cdot B$, состоящее в совместном появлении этих событий. Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Теорема умножения вероятностей независимых событий:

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$\boxed{\mathbf{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)}}$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, при условии, что первое событие уже наступило:

$$\boxed{\mathbf{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)}}$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.

$$\boxed{\mathbf{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)}}.$$

Теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий.

§4. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Определение. Будем говорить, что события B_1, B_2, …, B_n образуют полную группу событий, если:

1. Событие $B_1 + B_2 + \ldots + B_n$ достоверное;
2. События B_i и B_j – попарно несовместные (i= 1,2,…,n, j= 1,2,…,n, $i \neq j$).

Утверждение. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу равна 1.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = 1.}$$

Пример. Студент на экзамене может получить одну из четырех оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно». События B_1 – получил «отлично»,

B_2 – получил «хорошо»,

B_3 – получил «удовлетворительно»,

B_4 – получил «неудовлетворительно»

попарно несовместные и в сумме – событие достоверное, так как обязательно происходит одно из этих событий. Следовательно, события B_1, B_2, B_3, B_4 образуют полную группу событий.

Для нахождения вероятности события А, которое может произойти при условии осуществления одного из несовместных событий B_1, B_2, …, B_n, образующих полную группу, используется формула:

$$\boxed{\mathbf{P(A)=} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}$$

Эта формула называется формулой полной вероятности.

События B_1, B_2, …, B_n называются гипотезами.

Пример. В урну, содержащую два шара, опущен зеленый шар. Найти вероятность того, что будет вытащен из урны зеленый шар, если равновероятны первоначальные представления о цвете шаров.

Решение. Событие А– извлечен зеленый шар.

Возможны следующие гипотезы о первоначальном составе шаров:

B_1 – первоначально зеленых шаров не было в урне;

B_2 – был 1 зеленый шар;

B_3 – оба шара зеленые.

По условию задачи гипотезы равновероятны и образуют полную группу событий, следовательно, вероятность каждой из гипотез равна ⅓, то есть $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = ⅓$. Тогда условные вероятности наступления события А при появлении каждой из гипотез будут соответственно равны:

$P_{B_1}(A) = ⅓$; $P_{B_2}(A) = ⅔$; $P_{B_3}(A) = 1$.

Отсюда по формуле полной вероятности получаем:

$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)$.

$P(A) = ⅓ \cdot ⅓ + ⅓ \cdot ⅔ + ⅔ \cdot 1 = ⅔$.

Пусть событие А может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу событий.

Если событие А уже произошло, то вероятности гипотез $B_1, B_2, \ldots, B_n$ могут быть переоценены по следующей формуле:

$$\boxed{P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}},$$

где i = 1, 2, 3,…, n.

Эта формула называется <u>формулой Байеса</u>.

Пример. Два автомата производят одинаковые детали, поступающие на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй 84%. Наудачу взятая деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь сделана первым автоматом.

Решение. Рассмотрим событие А – деталь отличного качества.

Можно составить две гипотезы:

B_1 – деталь сделана первым автоматом, причем $P(B_1) = 2/3$, так как его производительность вдвое больше производительности второго автомата.

B_2 – деталь сделана вторым автоматом, причем $P(B_2) = 1/3$.

Условная вероятность появления события А при выполнении гипотезы B_1 равна $P_{B_1}(A) = 0,6$.

Условная вероятность появления события А при выполнении гипотезы B_2 равна: $P_{B_2}(A) = 0,84$.

Отсюда вероятность появления события А равна:

$P(A) = 2/3 \cdot 0,6 + 1/3 \cdot 0,84 = 0,68$.

Тогда вероятность того, что деталь отличного качества сделана первым автоматом, по формуле Байеса равна:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{2/3\cdot 0,6}{0,68} = \frac{10}{17}.$$

§5. Формула Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие может появиться либо не появиться. Условимся считать, что вероятность события А в каждом испытании одна и та же, а именно равна p $(0< p < 1)$.

Следовательно, вероятность непоявления события А в каждом испытании также постоянна и равна q = 1 – p.

Часто возникает задача вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие А наступит ровно k раз.

Искомая вероятность обозначается $P_n(k)$.

Например, символ $P_5(3)$, означает вероятность того, что в пяти испытаниях событие появится ровно 3 раза и, следовательно, не наступит 2 раза.

Поставленную задачу можно решить с помощью так называемой формулы Бернулли.

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}},$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Вероятности того, что в n испытаниях событие наступит : а)менее t раз; б) более t раз; в) не менее t раз; г) не более t раз находят соответственно по формулам :

а) $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(t-1) = P_n(k<t)$,

б) $P_n(t+1) + P_n(t+2) + \ldots + P_n(n) = P_n(k>t)$,

в) $P_n(t) + P_n(t+1) + \ldots + P_n(n) = P_n(k \geq t)$,

г) $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(t) = P_n(k \leq t)$.

Пример. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равна p=0,7. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

Решение. Вероятность нормального расхода электроэнергии в продолжении каждых из 6 суток постоянна и равна p=0,7. Следовательно, вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна q =1 – p = 1 – 0,7 = 0,3.

Из условия задачи следует, что n = 6; k=4.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна:

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot (0{,}7)^4 \cdot (0{,}3)^2 = 0{,}324.$$

§6. Локальная теорема Лапласа

Формула Бернулли позволяет вычислить вероятность того, что событие появиться в n испытаниях ровно k раз: $P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

При применении формулы учитывается, что вероятность появления события в каждом испытании постоянна. Легко видеть, что пользоваться формулой Бернулли при больших значениях n достаточно трудно.

Естественно, возникает вопрос: нельзя ли вычислить интересующую нас вероятность, если число испытаний велико, не прибегая к формуле Бернулли? Оказывается, можно.

Локальная теорема Лапласа и дает асимптотическую формулу, которая позволяет приближенно найти вероятность появления события ровно k раз в n испытаниях, если число испытаний достаточно велико.

<u>Локальная теорема Лапласа.</u>

Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n):

$$\boxed{P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)}$$

где $x = \dfrac{k - n \cdot p}{\sqrt{npq}}$; φ(x) = $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$; q = 1 – p.

Имеются таблицы, в которых помещены значения функции φ(x)= $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$,

соответствующие положительным значениям аргумента x (см. приложение 1).

Для отрицательных значений аргумента пользуются теми же таблицами, так как φ(x) – функция четная, то есть φ(–x) = φ(x).

Пример. Найти вероятность того, что событие А наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании

равна 0,2.

Решение. По условию, n=400; k=80; p=0,2; q=0,8.

Воспользуемся формулой Лапласа:

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{8} \cdot \varphi(x).$$

Вычислим определяемое данными задачи значение x:

x = (k–np) / $\sqrt{npq}$ = (80 – 400 · 0,2) / 8 = 0

По таблице приложения 1 находим φ(0)=0,3989.

Искомая вероятность:

$$P_{400}(80) = (1/8) \cdot 0{,}3989 = 0{,}04986.$$

Формула Бернулли приводит примерно к такому же результату (выкладки ввиду их громоздкости опущены): $P_{400}(80)$=0,0498.

§7. Интегральная теорема Лапласа

Вновь предположим, что производится n испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А постоянна и равна p (0<p<1). Как вычислить вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие А появится в n испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз (для краткости будем говорить «от k_1 до k_2 раз»)? На этот вопрос отвечает интегральная теорема Лапласа, которую мы приводим ниже.

Интегральная теорема Лапласа.

Если вероятность р наступления события А в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие А появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближенно равна определенному интегралу:

$$\boxed{P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz},$$

где $x' = (k_1 - np)/\sqrt{npq}$ и $x'' = (k_2 - np)/\sqrt{npq}$.

При решении задач, требующих применения интегральной теоремы Лапласа, пользуются специальными таблицами, так как неопределенный интеграл $\int e^{-\frac{z^2}{2}} dz$, не выражается через элементарные функции. Таблица для функции Ф(x) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ приведена в приложении 2. В таблице даны значения функции Ф(x) для неотрицательных значений x; для x<0 пользуются той же таблицей, так как Ф(x) – функция нечетная: Ф(–x) = – Ф(x). В таблице приведены значения функции лишь до x = 5, так как для x>5 можно принять Ф(x) = 0,5. Функцию Ф(x) часто называют функцией Лапласа.

Пример. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100.

Решение. По условию p = 0,2; q=0,8; n= 400; k_1=70; k_2=100.

Вычислим верхний и нижний пределы интегрирования:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}25,$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 2{,}5\,.$$

Таким образом, получаем:

$P_{400}(70;\ 100) = Ф\ (2{,}5) – Ф(–1{,}25) = Ф\ (2{,}5) + Ф(1{,}25)$,

так как Ф(–1,25) = –Ф (1,25).

По таблице приложения 2 находим:

Ф(2,5) = 0,4938, Ф(1,25) = 0,3944.

Искомая вероятность: $P_{400}(70;\ 100) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882$.

§8. Формула Пуассона

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p. Для определения вероятности k появлений события в испытаниях используют формулу Бернулли. Если же n велико, то пользуются асимптотической локальной формулой Лапласа. Однако, эта формула непригодна, если вероятность события мала (p ≤ 0,1). В этих случаях (n велико, p мало) прибегают к асимптотической формуле Пуассона.

Итак, поставим перед собой задачу найти вероятность того, что при очень большом числе испытаний, в каждом из которых вероятность события очень мала, событие наступит ровно k раз. Сделаем важное дополнение: произведение n·p сохраняет постоянное значение, а именно, n·p=λ.

Формула Пуассона имеет вид:

$$\boxed{P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}},$$

где $\boxed{\lambda = n \cdot p}$.

Эта формула выражает закон Пуассона распределения вероятностей массовых (n велико) и редких (p мало) событий.

Пример. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредиться равно 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут три негодных изделия.

Решение. По условию n=5000; p = 0,0002; k = 3. Найдем λ:

$\lambda = n \cdot p = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1.$

Искомая вероятность по формуле Пуассона равна:

$$P_{5000}(3) = \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k! = 1^3 \cdot e^{-1} / 3! = \frac{1}{6e} \approx 0{,}062.$$

§9. Дискретные случайные величины.

Закон распределения дискретной случайной величины

Определение. *Дискретной* называют случайную величину, возможные значения которой есть отдельные изолированные числа, которые эта величина принимает с определенными вероятностями.

То есть, возможные значения дискретной случайной величины можно перенумеровать. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным (счетным).

Определение**.** *Законом распределения* дискретной случайной величины называют перечень ее возможных значений и соответствующих им вероятностей.

Закон распределения дискретной случайной величины X может быть задан в виде таблицы, первая строка которой возможные значения x_i, а вторая–вероятности p_i.

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

В случае, когда множество значений дискретной случайной величины конечно, сумма вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Если множество возможных значений случайной величины х бесконечно (счетно), то закон распределения будет иметь следующий вид:

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

где ряд $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ сходится и его сумма равна единице:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Закон распределения дискретной случайной величины х может быть также задан аналитически

$$P(X = x_i) = \varphi(x_i)$$

или с помощью функции распределения.

Закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки $M_1(x_1;p_1)$, $M_2(x_2;p_2)$, …, $M_n(x_n;p_n)$ (x_i – возможные значения, p_i – соответствующие вероятности) и соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют *многоугольником распределения*.

Пример 1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	3	6	8

P	0,2	0,1	0,4	0,3

Построить многоугольник распределения.

Решение. Построим прямоугольную систему координат, причем по оси абсцисс будем откладывать возможные значения x_i, а по оси ординат– соответствующие вероятности p_i.

Построим точки $M_1(1; 0,2)$, $M_2(3; 0,1)$, $M_3(6; 0,4)$ и $M_4(8; 0,3)$. Соединив эти точки отрезками, получим искомый многоугольник распределения.

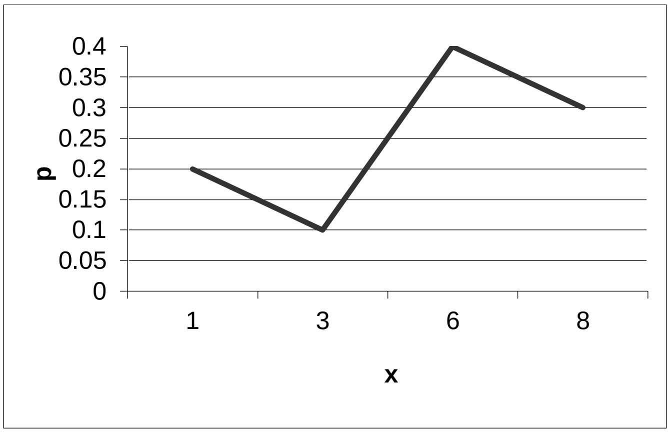

Рис.1 Многоугольник распределения.

Пример 2. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в первом опыте равна 0,1. составить закон распределения числа отказавших элементов в первом опыте.

Решение. Дискретная случайная величина X (число отказавших элементов в первом опыте) имеет следующие возможные значения: x_1 = 0 (ни один из элементов устройства не отказал), x_2 = 1 (отказал один элемент), x_3= 2 (отказали два элемента), x_4 = 3 (отказали три элемента).

Отказы элементов независимы один от другого, вероятности отказа каждого элемента равны между собой, поэтому применима формула Бернулли. Учитывая, что по условию n = 3, p = 0,1 (следовательно, q = 1 – 0,1 = 0,9), получим:

$P_3(0) = q^3 = 0,9^3 = 0,729$;

$P_3(1) = C_3^1 \cdot p^1 \cdot q^3 = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}243;$

$P_3(2) = C_3^2 \cdot p^2 \cdot q^1 = 3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 0{,}027;$

$P_3(3) = p^3 = 0{,}1^3 = 0{,}001.$

Контроль: 0,729 + 0,243 + 0,027 + 0,001 = 1.

Получаем закон распределения:

X	0	1	2	3
P	0.729	0,243;	0,027	0.001

§10. Числовые характеристики дискретной случайной величины

Определение. *Математическим ожиданием* дискретной случайной величины M(X) называется число, равное сумме произведений значений случайной величины на соответствующие вероятности их появления:

$$\boxed{M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_1 \cdot p_1 + \ldots + x_n \cdot p_n}$$

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:
$$M(C) = C.$$
2. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых (то же относится к разности):
$$M(X \pm У) = M(X) \pm M(У).$$
3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:
$$M(X \cdot У)=M(X) \cdot M(У).$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(C \cdot X)=C \cdot M(X).$$

<u>Определение.</u> *Дисперсией* (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$\boxed{D(X)=M[X-M(X)]^2}.$$

Теорема. *Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:*

$$\boxed{D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2}.$$

Доказательство. Математическое ожидание M(X) есть постоянная величина, следовательно, $2 \cdot M(X)$ и $M^2(X)$ есть также постоянные величины. Приняв это во внимание и пользуясь свойствами математического ожидания (постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания, математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых), упростим формулу, выражающую определение дисперсии:

$$D(X) = M[X-M(X)]^2 = M[X^2 - 2 \cdot X \cdot M(X)+M^2(X)] = M(X^2)-2 \cdot M(X) \cdot M(X)+M^2(X) =$$

$$=M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Итак,

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Квадратная скобка введена в запись формулы для удобства ее запоминания.

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянной равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D(C \cdot X)=C^2 \cdot D(X).$$

3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

4. Дисперсия суммы постоянной величины и случайной равна дисперсии случайной величины:

$$D(X + C) = D(X).$$

Пример1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	–5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Решение. Найдем математическое ожидание X:

$$M(X) = -5 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 = -0{,}3.$$

Дисперсию можно вычислить, исходя из ее определения, однако воспользуемся формулой:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

которая быстрее ведет к цели.

Напишем закон распределения X^2:

X	25	4	9	16
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Найдем математическое ожидание X^2:

$$M(X^2) = 25 \cdot 0{,}4+4 \cdot 0{,}3+9 \cdot 0{,}1+16 \cdot 0{,}2 = 15{,}3.$$

Найдем искомую дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 15{,}3 - (-0{,}3)^2 = 15{,}21.$$

Найдем искомое среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{15{,}21} = 3{,}9.$$

Определение. Дискретная случайная величина X, вероятности значений которой находятся по формуле Бернулли, называется распределённой по *биномиальному* закону. В таком случае говорят, что X имеет биномиальное распределение.

Теорема.

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределённой по биномиальному закону, вычисляются по формулам:

$$M(X) = n \cdot p, \quad D(X) = n \cdot p \cdot q, \quad \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q},$$

где n – число испытаний;

p – вероятность появления события

q – вероятность непоявления события.

§11. Непрерывные случайные величины.

Функция распределения вероятностей. Плотность вероятностей

Определение. *Непрерывной* называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Для непрерывной случайной величины вводится понятие функции распределения.

Определение. *Функцией распределения* вероятностей случайной величины X называют функцию F(x), определяющую для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее x, то есть

$$\boxed{F(x) = P(X < x)}$$

Часто вместо термина «функция распределения» используют термин «интегральная функция распределения».

Свойства функции распределения:

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку [0; 1]:
$0 \le F(x) \le 1$.

2. Функция распределения есть неубывающая функция, то есть
если $x_2 > x_1$,

то $F(x_2) \ge F(x_1)$.

3. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале [a; b), равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю:

$$P(X = x_1)=0.$$

5. Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a; b), то

$$F(x) = 0 \text{ при } x \le a;$$

$$F(x) = 1 \text{ при } x \ge b.$$

6. Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей оси Ox, то справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \ \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

<u>Определение</u>. *Плотностью распределения* вероятностей непрерывной случайной величины называют первую производную от функции распределения:

$$\boxed{f(x) = F'(x)}.$$

Часто вместо термина «плотность распределения вероятностей» используют термин «плотность вероятностей» и «дифференциальная функция».

Свойства плотности распределения:

1. Плотность распределения неотрицательна в любой точке оси Ох:

$$f(x) \geq 0 \text{ при } x \in (-\infty; +\infty).$$

2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина Х примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), определяется равенством:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

3. Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

4. Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

5. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

Определение. *Математическое ожидание* непрерывной случайной величины Х, возможные значения которой принадлежат всей оси Ох, определяется равенством

$$\boxed{M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx},$$

где f(x) – плотность распределения случайной величины Х.

Предполагается, что интеграл сходится абсолютно. В частности, если все возможные значения принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$\boxed{\text{M(X)}=\int_a^b xf(x)dx}.$$

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$\text{M(C)=C.}$$

2. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X_1+X_2+...+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n).$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(C\cdot X)=C\cdot M(X).$$

4. Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$$M(X_1\cdot X_2\cdot ...\cdot X_n)=M(X_1)\cdot M(X_2)\cdot ...\cdot M(X_n).$$

<u>Определение</u>. *Дисперсия* непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством:

$$\boxed{\text{D(x)}=M(X-M(X))^2=\int_{-\infty}^{\infty}[X-M(X)]^2 f(x)dx}$$

Как и в случае с дискретной случайной величиной, можно показать, что

$$\boxed{\text{D(x)}=M(X^2)-[M(X)]^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-[M(X)]^2}$$

В частности, если все возможные значения X принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$D(X)=\int_a^b [x-M(X)]^2 f(x)dx$$

или

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2 .$$

Дисперсия обладает следующими свойствами:

1. Дисперсия постоянной равна нулю:

$$D(C)=0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат:

$$D(CX)=C^2 D(X).$$

3. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D(X_1+X_2+...+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+...+D(X_n).$$

4. Дисперсия произведения независимых случайных величин равна произведению дисперсий сомножителей:

$$D(X_1\cdot X_2\cdot ...\cdot X_n)=D(X_1)\cdot D(X_2)\cdot ...\cdot D(X_n).$$

5. Дисперсия суммы постоянной и независимой случайной величины равна квадрату постоянной на дисперсию независимой случайной величины:

$$D(X+C)=C^2\cdot D(X).$$

Пример. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{4}, 0<x\le 2,\\ 1, x>2.\end{cases}$$

Требуется найти:

1. график F(x),

2. плотность f(x),
3. график f(x),
4. математическое ожидание M(X),
5. дисперсию D(X),
6. среднее квадратическое отклонение σ,
7. $P(X < -2)$, $P(\frac{1}{2} \le X < 1)$ $P(X \ge \frac{3}{4})$.

Решение.

1. Построим график функции распределения

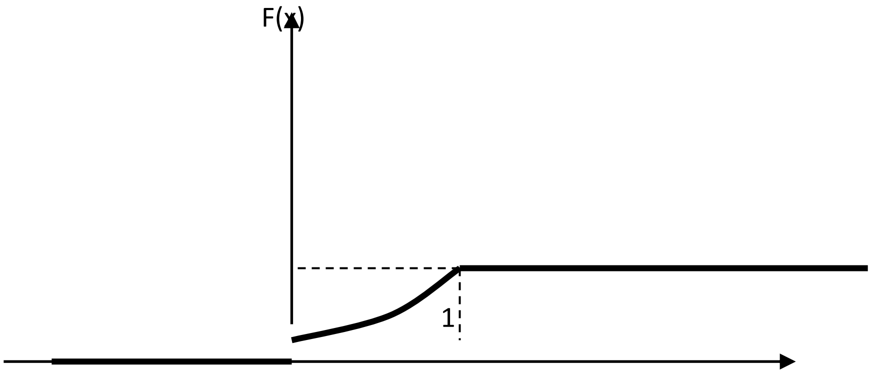

Рис. 2. График функции распределения.

2. Так как плотность f(x) равна первой производной от функции распределения

$$f(x) = F'(x),$$

то найдем производные от каждой из функций, составляющих функцию F(x):

$$0' = 0;\ \left(\frac{x^2}{4}\right)' = \frac{\left(x^2\right)'}{4} = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2};\ \ 1' = 0.$$

Тогда получаем функцию f(x):

$$f(x)=\begin{cases} 0, x \le 0, \\ \frac{x}{2}, 0 < x \le 2, \\ 0, x > 2. \end{cases}$$

3. Построим график плотности f(x)

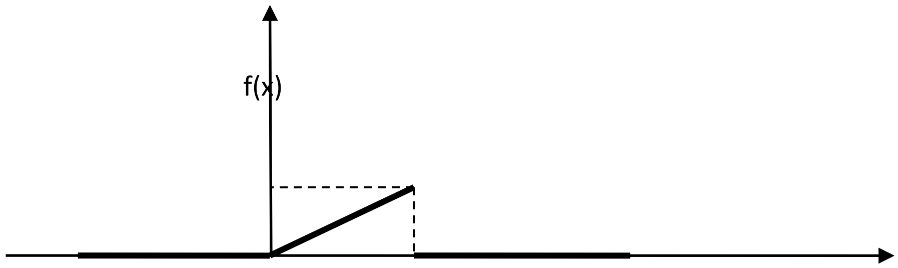

Рис. 3. График плотности f(x).

Заметим, что при x=0 производная F′(x) не существует.

4. Найдем математическое ожидание непрерывной случайной величины X:

$$M(X)=\int_0^2 x\cdot f(x)dx=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx=\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

5. Чтобы найти дисперсию непрерывной случайной величины X, найдём математическое ожидание случайной величины X^2:

$$M(X^2)=\int_0^2 x^2\cdot f(x)dx=\int_0^2 x^2\cdot\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^3dx=\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2=2.$$

Дисперсию найдем по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 2-\left(\frac{4}{3}\right)^2 = 2-1{,}78 = 0{,}22.$$

6. Среднее квадратическое отклонение σ найдем по формуле:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}22} = 0{,}47.$$

7. Найдем вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала $(-\infty;-2)$, то есть $P(X<-2)$:

$$P(X<-2) = F(-2) = 0,$$

Вторую вероятность P($\frac{1}{2} \le X < 1$) найдём по формуле P(a ≤ X < b)= F(b) – F(a):

$$P\left(\frac{1}{2} \le X < 1\right) = F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

Так как события $\left(X \ge \frac{3}{4}\right)$ и $\left(X < \frac{3}{4}\right)$ противоположные, то вероятность события $\left(X \ge \frac{3}{4}\right)$ находится по формуле:

$$P\left(X \ge \frac{3}{4}\right) = 1 - P\left(X < \frac{3}{4}\right) = 1 - F\left(\frac{3}{4}\right) = 1 - \frac{9}{64} = \frac{55}{64}.$$

§ 12 Равномерное и нормальное распределения

Равномерное распределение

Определение. Будем говорить, что распределение вероятностей непрерывной случайной величины является равномерным распределением, если плотность вероятности случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \notin [a;b], \\ c, x \in [a;b]. \end{cases}$$

Найдем значение c.

Так как плотность вероятности удовлетворяет условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,$$

то получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0dx + \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} 0dx = 1.$$

Так как f(x)=c на промежутке [a;b], то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b cdx = c\cdot x\Big|_a^b = c(b-a) = 1$,

следовательно, $c = \dfrac{1}{b-a}$.

Итак, равномерно распределённая случайная величина имеет плотность вероятности:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 0, x \notin [a;b], \\ \dfrac{1}{b-a}, x \in [a;b]. \end{cases}}$$

Пример. Если распределение случайной величины X – равномерное и задан отрезок [2;8], то b – a = 8 – 2 = 6 и

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \notin [2;8], \\ \dfrac{1}{6}, x \in [2;8]. \end{cases}$$

Найдем числовые характеристики равномерного распределения.

1. Математическое ожидание равномерного распределения.

$$M(X) = \int\limits_a^b xf(x)dx = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b xdx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Bigg|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)\cdot(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

Пример. Для предыдущей задачи найдем математическое ожидание

$$M(X) = \frac{b+a}{2} = \frac{8+2}{2} = 5.$$

2. Дисперсия равномерного распределения.

$$D(X) = \int\limits_a^в [x^2 f(x)dx - [M(x)]^2 =$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx-\frac{(b+a)^2}{4}=\frac{x^3}{3(b-a)}\Bigg|_a^b-\frac{(b+a)^2}{4}=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(b+a)^2}{4}=$$

$$=\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)}-\frac{b^2+2ab+a^2}{4}=$$

$$=\frac{4b^2+4ab+4a^2-3b^2-6ab-3a^2}{12}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример. Для предыдущей задачи найдем дисперсию:

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(8-2)^2}{12}=3.$$

Нормальное распределение

Определение. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения, если ее функция плотности вероятности имеет вид:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}},$$

где σ и *a*– параметры распределения.

Определение. График функции f(x) называется *нормальной кривой* или кривой нормального распределения.

Методами дифференциального исчисления можно установить, что:

1. кривая симметрична относительно прямой x=*a;*
2. функция имеет максимум при x=*a* $f(a)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;
3. по мере удаления x от точки *a* функция убывает и при $x\to\pm\infty$ кривая приближается к оси Ox;
4. кривая выпукла вверх при x є (*a*– σ; *a* + σ) и

   выпукла вниз при x є (– ∞; *a* – σ) и x є (*a* + σ; + ∞).

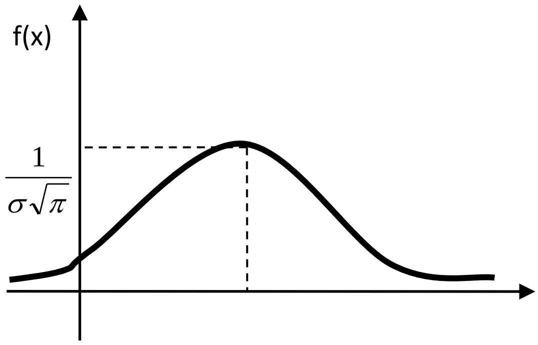

Рис. 4. Кривая нормального распределения.

Замечание. Форма кривой изменяется с изменением параметра σ. С возрастанием σ кривая f(x) становится более пологой и растянутой вдоль оси Ох.

Значениям случайной величины, близким к математическому ожиданию, соответствует большая плотность вероятности, то есть малые отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания встречаются чаще, чем большие.

Так как случайная величина определена на всей числовой оси, то при вычислении числовых характеристик рассматривается интеграл на промежутке (– ∞; +∞). Можно показать, что:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = a,$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2,$$

σ(X) = σ.

Свойства нормального распределения.

1. Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (α; β), находится по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) — \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где Ф(х) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа (см. приложение 2).

2. Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа δ находится по формуле:

P($|X-a|$<δ)=2Ф($\frac{\delta}{\sigma}$).

В частности при *a*=0 справедливо равенство:

$$P(|X|<\delta)= 2Ф(\frac{\delta}{\sigma}).$$

<u>Правило «3 σ»</u>.

Для нормально распределенной случайной величины велика вероятность того, что при однократном испытании отклонение величины от ее математического ожидания не превышает среднего квадратического отклонения.

Преобразуем формулу P($|X-a|$<δ)=2Ф($\frac{\delta}{\sigma}$), положив δ=σ·t. В итоге получим

P($|X-a|$<σ·t)=2Ф(t).

Если t=3 и, следовательно, σ·t=3σ, то $(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973$, то есть вероятность того, что отклонение от математического ожидания по абсолютной величине будет меньше утроенного среднего квадратического отклонения, равна 0,9973. Это и есть правило «3 σ».

Другими словами, вероятность того, что абсолютная величина отклонения превысит утроенное среднее квадратическое отклонение, очень мала, а именно равна 0,0027.

Это означает, что лишь в 0,27% случаев так может произойти, что значения нормально распределенной случайной величины выйдут за пределы интервала (a – 3σ; a + 3σ). Такие события, исходя из принципа невозможности маловероятных событий, можно считать практически невозможным. В этом и состоит сущность правила трех сигм.

Пример 1. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X равны соответственно 11 и 4.

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенного в интервале (19;23).

Решение. Воспользуемся формулой:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)—\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

По условию, α = 19; β = 23; a = 11; σ = 4, тогда

$$P(19<X<23)=\Phi\left(\frac{23-11}{4}\right)-\Phi\left(\frac{19-11}{4}\right)=\Phi(3)-\Phi(2).$$

По таблице приложения 2 находим: Ф(3)=0,49865, Ф(2)=0,4772.

Найдем искомую вероятность (вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (19;23)):

$$P(19<X<23)=0{,}49865-0{,}4772=0{,}02145.$$

Пример 2. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно 5 и среднее квадратическое отклонение равно 2. Написать плотность вероятности X.

Решение. Плотность нормально распределенрон случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Подставив *a*=5 и σ=2, получим:

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-5)^2}{2\cdot 2^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-5)^2}{8}}.$$

§13. Статистическое распределение выборки

Пусть для изучения количественного (дискретного или непрерывного) признака X из генеральной совокупности извлечена выборка, причем значение x_1 наблюдалось n_1 раз, значение x_2 наблюдалось n_2 раз, …, значение x_k наблюдалось n_k раз.

Наблюдаемые значения x_i (i = 1, 2, …, n) признака X называют вариантами, а последовательность всех вариант, записанных в возрастающем порядке, – *вариационным рядом*. Числа наблюдений n_i называют *частотами*, их сумма $\sum n_i = n$ — *объем выборки.* Отношения частот к объему выборки $\frac{n_i}{n} = W_i$ — *относительными частотами*.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант x_i вариационного ряда и соответствующих им частот n_i (сумма всех частот равна объему выборки n) или относительных частот W_i (сумма всех относительных частот равна единице). Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал).

Заметим, что в теории вероятностей под распределением понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике – соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами (или относительными частотами).

Пример. Задано распределение частот выборки объема n = 20:

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

В данной выборке получены следующие варианты $x_1 = 2$; $x_2 = 6$; $x_3 = 12$, соответствующие частоты $n_1 = 3$; $n_2 = 10$; $n_3 = 7$.

Напишем распределение относительных частот.

Решение. Найдем относительные частоты, для чего разделим частоты на объем выборки $\sum n_i = n$ = 3 + 10 + 7 = 20.

$$W_i = \frac{n_i}{n}$$ — относительные частоты:

$$W_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{3}{20} = 0{,}15;\ W_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 0{,}50;\ W_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{7}{20} = 0{,}35.$$

Напишем распределение относительных частот:

x_i	2	6	12
W_i	0,15	0,50	0,35

Контроль: сумма всех относительных частот W_i равна единице:

$$\sum W_i = W_1 + W_2 + W_3 = 0{,}15 + 0{,}50 + 0{,}35 = 1.$$

§14. Эмпирическая функция распределения

Пусть известно статистическое распределение частот количественного признака X. Введем обозначения: n_x — число наблюдений, при которых наблюдалось значение признака, меньше x; n – общее число наблюдений (объем выборки). Ясно, что относительная частота события X<x равна $\frac{n_x}{n}$. Если x изменяется, то, вообще говоря, изменится и относительная частота, то есть относительная частота $\frac{n_x}{n}$ есть функция от x. Так как эта функция находится эмпирическим (опытным) путем, то ее называют эмпирической.

Определение. *Эмпирическая функция распределения* (функция распределения выборки) – функция $F^*(x)$, определяющая для каждого значения x относительную частоту события X<x.

$$\boxed{F^*(x) = \frac{n_x}{n}},$$

где n_x — число вариант, меньших x; n – объем выборки.

Например, для того чтобы найти $F^*(x_2)$, надо число вариант, меньших x_2, разделить на объем выборки:

$$F^*(x_2) = \frac{n_{x_2}}{n}.$$

В отличие от эмпирической функции распределения выборки функцию распределения F(x) генеральной совокупности называют *теоретической функцией распределения*. Различие между эмпирической и теоретической функциями состоит в том, что теоретическая функция F(x) определяет вероятность события $X<x$, а эмпирическая функция $F^*(x)$ определяет относительную частоту этого же события.

Из теоремы Бернулли следует, что относительная частота события $X<x$, то есть $F^*(x)$, стремится по вероятности к вероятности этого события, то есть к значению F(x). Другими словами, при больших значениях n числа $F^*(x)$ и F(x) мало отличаются одно от другого в том смысле, что $\lim\limits_{n\to\infty} P[|F(x)-F^*(x)|<\varepsilon]=1, (\varepsilon>0)$.

Уже отсюда следует целесообразность использования эмпирической функции распределения выборки для приближенного представления теоретической (интегральной) функции распределения генеральной совокупности. Такое заключение подтверждается и тем, что $F^*(x)$ обладает всеми свойствами F(x).

Из определения функции $F^*(x)$ вытекают следующие ее свойства:

1) Значения эмпирической функции принадлежит отрезку [0; 1];
2) $F^*(x)$ – неубывающая функция;
3) Если x_1 ─ наименьшая варианта, то $F^*(x) = 0$ при $x < x_1$;
   если x_k ─ наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Итак, эмпирическая функция распределения выборки служит для оценки теоретической функции распределения генеральной совокупности.

Пример. Построить эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

Варианты x_i	2	6	10
Частоты n_i	12	18	30

Решение. Найдем объем выборки (сумма всех частот n_i):

$$n = n_1 + n_1 + n_1 = 12 + 18 + 30 = 60.$$

Наименьшая варианта равна 2 ($x_1 = 2$), следовательно, $F^*(x) = 0$ при $x \le 2$ (по свойству 3 функции $F^*(x)$);

значения, меньшие 6 ($x<6$), а именно $x_1 = 2$, наблюдались $n_1 = 12$ раз, следовательно, $F^*(x) = \frac{n_x}{n} \Rightarrow F^*(x) = \frac{n_{x_1}}{n} = \frac{12}{60} = 0{,}2$ при $2<x\le6$;

значения $x<10$, а именно $x_1 = 2$, $x_1 = 2$ наблюдались $n_1 + n_2 = 12 + 18 = 30$ раз, следовательно $F^*(x) = \frac{30}{60} = 0{,}5$ при $6<x\le10$.

Так как $x =10$ – наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x>10$ (по свойству 4 функции $F^*(x)$).

Искомая эмпирическая функция имеет вид:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, при\ \ x \le 2, \\ 0{,}2\ \ при\ \ 2 < x \le 6, \\ 0{,}5\ \ при\ \ 6 < x \le 10, \\ 1\ \ при\ \ x > 10. \end{cases}$$

Ниже приведен график полученной эмпирической функции.

На графике на соответствующих осях откладывают значения функции $F^*(x)$ и интервалы вариант

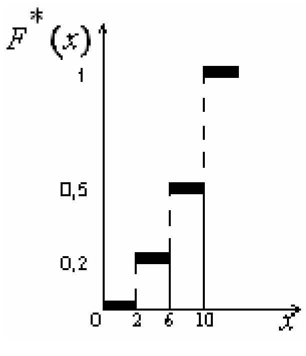

Рис. 5. График эмпирической функции.

§15. Полигон и гистограмма

Для наглядности строят различные графики статистического распределения, в частности, полигон и гистограмму.

Определение. *Полигоном* частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \ldots, (x_k, n_k)$.

Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i. Точки (x_i, n_i) соединяют отрезками прямых и получают полигон частот.

Определение. *Полигоном относительных частот* называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1, w_1), (x_2, w_2), \ldots, (x_k, w_k)$.

Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат w_i. Точки (x_i, w_i) соединяют отрезками прямых и получают полигон относительных частот.

На рисунке изображен полигон относительных частот следующего распределения:

x	1,5	3,5	5,5	7,5
w	0,1	0,2	0,4	0,3

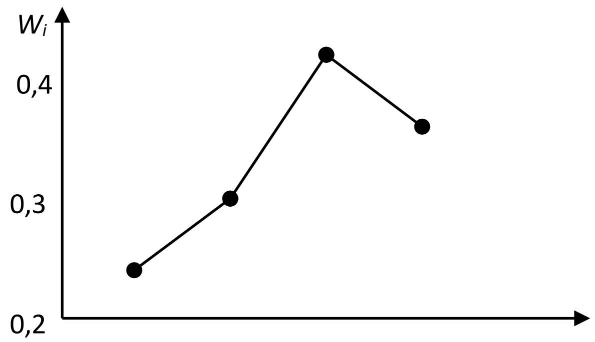

Рис. 6. Полигон относительных частот.

В случае непрерывного признака целесообразно строить гистограмму, для чего интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длинной h и находят для каждого частичного интервала n_i – сумму частот вариант, попавших в i-ый интервал.

Определение. *Гистограммой частот* называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению n_i / h (плотность частоты).

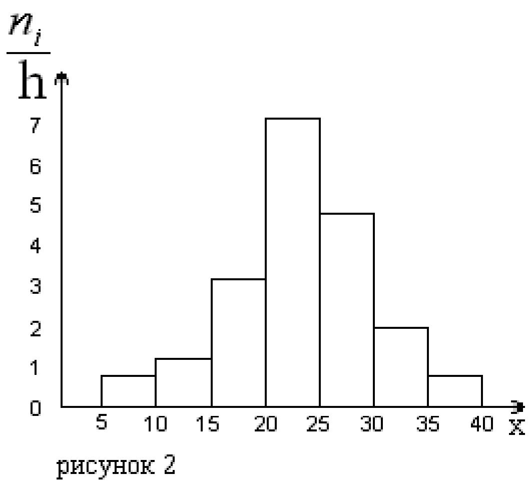

Рис. 7. Гистограмма частот.

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс, на расстоянии n_i / h.

Площадь i-го частичного прямоугольника равна $h \cdot (n_i / h) = n_i$ — сумме частот вариант i-го интервала; следовательно, площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, то есть объему выборки n.

На рисунке 2 изображена гистограмма частот распределения объема n=100, приведенного в таблице 1.

Частичный интервал, длиною h=5	Сумма частот вариант частичного интервала n_i	Плотность частоты n_i / h
5 – 10	4	0,8
10 – 15	6	1,2
15 – 20	16	3,2

20 – 25	36	7,2
25 – 30	24	4,8
30 – 35	10	2,0
34 – 40	4	0,8

Определение. *Гистограммой относительных частот* называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длинною h, а высоты равны отношению W_i / h (плотность относительной частоты).

Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии W_i / h. Площадь i-го частичного прямоугольника равна $h \cdot (W_i / h) = W_i$ — относительной частоте вариант, попавших в i-й интервал. Следовательно, площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, то есть единице.

Примеры.

1. В результате выборки получена следующая таблица распределения частот.

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Построить полигоны частот и относительных частот распределения.

Для начала построим полигон частот.

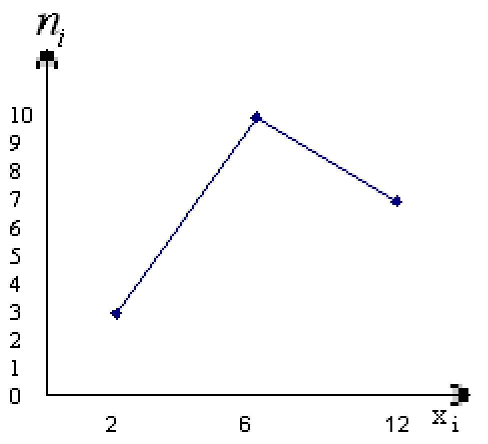

Рис. 8. Полигон частот.

Чтобы построить полигон относительных частот найдем относительные частоты, для чего разделим частоты на объем выборки n.

n = 3 + 10 + 7 = 20.

$W_1 = 3/20 = 0{,}15$, $W_2 = 10/20 = 0{,}5$, $W_3 = 7/20 = 0{,}35$.

Получаем

x_i	2	6	12
W_i	0,15	0,50	0,35

Построим полигон относительных частот.

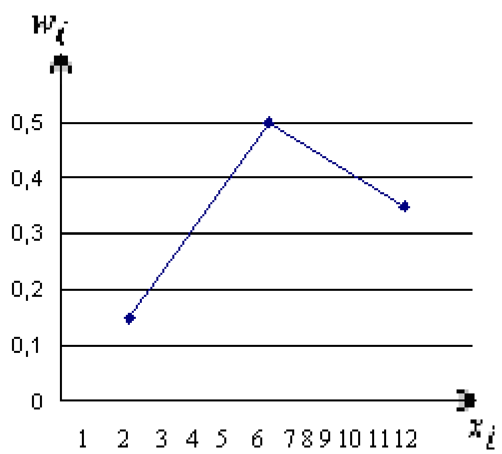

Рис. 9. Полигон относительных частот.

2. Построить гистограммы частот и относительных частот распределения.

Найдем плотность частоты $n_i\ /\ h$:

Частичный интервал, длиною h = 3	Сумма частот вариант частичного интервала n_i	Плотность частоты $n_i\ /\ h$
2 – 5	9	3
5 – 8	10	3,3
8 – 11	25	8,3
11 – 14	6	2

Построим гистограмму частот.

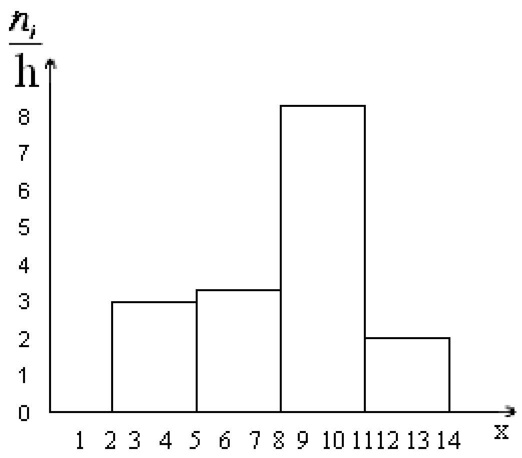

Рис. 10. Гистограмма частот.

Чтобы построить гистограмму относительных частот, нужно найти относительные частоты. Для этого найдем объем выборки n.

$$n = \sum n_i = 50.$$

Теперь найдем относительные частоты $W_i = \dfrac{n_i}{n}$:

$W_1 = 9/50 = 0{,}18$, $W_2 = 10/50 = 0{,}2$, $W_3 = 25/50 = 0{,}5$, $W_4 = 6/50 = 0{,}12.$

Получим:

Частичный интервал	Сумма относительных частот W_i	Плотность частоты W_i / h
2 – 5	0,18	0,06
5 – 8	0,2	0,07
8 – 11	0,5	0,16
11 – 14	0,12	0,04

Плотности частот W_i / h нужно вычислить. При этом h = 3.

$W_1 / h = 0{,}18 / 3 = 0{,}06,$
$W_2 / h = 0{,}2 / 3 = 0{,}07,$
$W_3 / h = 0{,}5 / 3 = 0{,}16,$
$W_4 / h = 0{,}12 / 3 = 0{,}04.$

Построим гистограмму относительных частот.

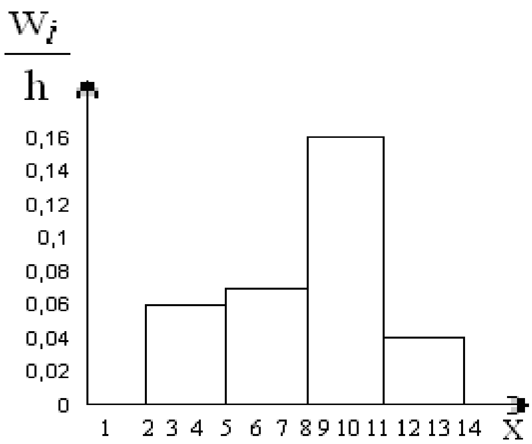

Рис.11. Гистограмма относительных частот.

§16. Точечные оценки

Определение. *Статистической оценкой* Q^* неизвестного параметра Q теоретического распределения называют функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от наблюдаемых случайных значений $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Определение. *Точечной оценкой* называют статистическую оценку, которая определяется одним числом $Q^* = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — результаты n наблюдений над количественным признаком X (выборка).

Определение. *Несмещенной* называют точечную оценку Q^*, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру Q при любом объеме выборки, то есть $M(Q^*) = Q$. *Смещенной* называют точечную оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Выборочная средняя.

Пусть для изучения генеральной совокупности относительно количественного признака X извлечена выборка объема n.

Определение. *Выборочной средней* $\overline{x_B}$ называют среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности.

Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ признака выборки объема n различны, то $\boxed{\overline{x_B} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n}$

Если же все значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то

$$\boxed{\overline{x_B} = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i\right)/n},$$

где $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ – объем выборки.

Выборочная средняя является несмещенной оценкой генеральной средней (неизвестного математического ожидания).

Замечание. Если первоначальные варианты x_i — большие числа, то для упрощения решения целесообразно вычесть из каждой варианты одно и то же

число C, то есть перейти к условным вариантам $u_i = x_i - c$. Тогда

$$\overline{x_B} = c + (\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot u_i)/n.$$

Выборочная дисперсия.

Смещенной оценкой генеральной дисперсии служит выборочная дисперсия. Эту величину вводят для того, чтобы охарактеризовать рассеяние наблюдаемых значений количественного признака выборки вокруг среднего значения $\overline{x_B}$.

<u>Определение</u>. *Выборочной дисперсией* D_B называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего значения $\overline{x_B}$. Если значения признака x_1, x_2, …, x_k имеют соответственно частоты n_1, n_2, …, n_k, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то

$$\boxed{D_B = (\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_B})^2)/n.}$$

Эта оценка является смещенной, так как $M(D_B) = \frac{n-1}{n} \cdot D_Г$,

где $D_Г$ – генеральная дисперсия – среднее арифметическое квадратов отклонения значения признака генеральной совокупности от их среднего значения $\overline{x_n}$.

<u>Теорема</u>. Выборочная дисперсия равна среднему квадратов значений признака минус квадрат выборочной средней.

$$\boxed{D_B = \overline{x^2} - [\bar{x}]^2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i x_i}{n}\right]^2.}$$

Для вычисления выборочной дисперсии эта формула наиболее удобна.

Замечание. Если перейти к условным вариантам $u_i = x_i - c$, то дисперсия при этом не изменится. Тогда $D_B(x) = D_B(u) = \overline{u}^2 - [\bar{u}]^2 = \frac{\sum n_i \cdot u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i \cdot u_i}{n}\right]^2$.

Оценка генеральной дисперсии по исправленной выборочной.

Пусть из генеральной совокупности в результате n независимых наблюдений над количественным признаком X извлечена повторная выборка объема n:

Значения признака	x_i	x_1	x_2	…	x_k
Частоты	n_i	n_1	n_2	…	n_k

При этом $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Требуется по данным выборки найти неизвестную генеральную дисперсию $D_Г$. Если в качестве оценки $D_Г$ принять выборочную дисперсию, то эта оценка будет приводить к систематическим ошибкам, давая заниженное значение $D_Г$. Объясняется это тем, что математическое ожидание выборочной дисперсии не равно оцениваемой $D_Г$, а равно $M[D_B] = \frac{n-1}{n} D_Г$.

Легко «исправить» выборочную дисперсию так, чтобы ее математическое ожидание было равно генеральной дисперсии. Достаточно для этого умножить D_B на дробь n/(n–1). Сделав это, мы получим *исправленную дисперсию*, которую обычно обозначают S^2.

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии служит исправленная выборочная дисперсия:

$$\boxed{S^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x}_B)^2}{n-1}}.$$

Более удобна форма:

$$\boxed{S_x^2 = \frac{\sum n_i x_i^2 - [\sum n_i x_i]^2 / n}{n-1}}.$$

В условных вариантах она имеет вид:

$$S_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2 - [\sum n_i u_i]^2 / n}{n-1},$$

причем если $u_i = x_i - c$, то $S_x^2 = S_u^2$; если $u_i = c \cdot x_i$, то $S_x^2 = S_u^2 / c^2$.

Задача 1.

Из генеральной совокупности извлечена выборка объемом n = 60

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Найти несмещенную оценку генеральной средней.

Решение. Несмещенной оценкой генеральной средней является выборочная средняя: $\overline{x}_B = (\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i)/n$,

где x_i — варианта выборки, n_i — частота варианты x_i; $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ объем выборки.

$\overline{x}_B = (8 \cdot 1 + 40 \cdot 3 + 10 \cdot 6 + 2 \cdot 26)/60 = (8 + 120 + 60 + 52)/60 = 240/60 = 4$.

Ответ: $\overline{x}_B = 4$.

Задача 2.

Выборочная совокупность задана таблицей распределения

x_i	1	5	3	4
n_i	20	15	10	5

Найти выборочную дисперсию.

Решение. Найдем выборочную среднюю

$$\overline{x}_B = (\sum_{i=1}^{4} n_i \cdot x_i)/n = \frac{20 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{20 + 15 + 10 + 5} = \frac{100}{50} = 2.$$

Найдем выборочную дисперсию:

$$D_B = (\sum_{i=1}^{4} n_i (x_i - \overline{x_B})^2)/n,$$

$$D_B = \frac{20\cdot(1-2)^2 + 15\cdot(2-2)^2 + 10\cdot(3-2)^2 + 5\cdot(4-2)^2}{50} =$$

$$= \frac{20\cdot(-1)^2 + 15\cdot 0 + 10\cdot 1^2 + 5\cdot 2^2}{50} = \frac{20+10+20}{50} = \frac{50}{50} = 1.$$

Ответ: $D_B = 1$.

§17. Интервальные оценки

Определение. *Интервальной* называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала, покрывающего оцениваемый параметр.

Доверительным называют интервал, который с заданной вероятностью (надежностью) γ покрывает заданный параметр.

Интервальной оценкой (с надежностью γ) математического ожидания a нормально распределенного признака X по выборочной средней $\overline{x}_B$ при известном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности служит доверительный интервал

$$\boxed{\overline{x}_B - t\cdot\sigma/\sqrt{n} < a < \overline{x}_B + t\cdot\sigma/\sqrt{n}},$$

где $t\cdot\sigma/\sqrt{n}$ = δ – точность оценки,

n – объем выборки,

t – значение аргумента функции Лапласа Φ(t) (см. приложение 2). при котором Φ(t)=γ/2.

При неизвестном σ (и объеме выборки n<30) доверительным будет интервал

$$\boxed{\overline{x}_B - t_\gamma\cdot S/\sqrt{n} < a < \overline{x}_B + t_\gamma\cdot S/\sqrt{n}},$$

где S – «исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение,

t_γ находят по таблице приложения 3 по заданным n и γ.

Интервальной оценкой (с надежностью γ) среднего квадратического отклонения σ нормально распределенного количественного признака X по «исправленному» выборочному среднему квадратическому отклонению S служит доверительный интервал:

$$\boxed{s \cdot (1-q) < \sigma < s \cdot (1+q)}$$

при q<1,

$$\boxed{0 < \sigma < s \cdot (1 + q)}$$

при q > 1,

где q находят по таблице приложения 4 по заданным n и γ.

Интервальной оценкой (с надежностью γ) неизвестной вероятности p биноминального распределения по относительной частоте w служит доверительный интервал (с приближенными концами p_1 и p_2)

$$p_1 < p < p_2,$$

где $p_1 = \frac{n}{t^2+n}\left[W^2 + \frac{t^2}{2n} - t\sqrt{\frac{W(1-W)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right],$

$$p_2 = \frac{n}{t^2+n}\left[W^2 + \frac{t^2}{2n} + t\sqrt{\frac{W(1-W)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right].$$

где n – общее число испытаний,

m – число появлений события.

W – относительная частота, равная отношению m/n;

t – значение аргумента функции Лапласа (приложение 2), при котором Ф(t)=γ/2 (γ – заданная надежность).

Замечание. При больших значениях n (порядка сотен) можно принять в качестве приближенных границ доверительного интервала

$$p_1 = W - t\sqrt{\frac{W(1-W)}{n}},\ p_2 = W + t\sqrt{\frac{W(1-W)}{n}}$$

Пример 1. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n = 9:

Варианта x_i	5	3	3	1	1	3
Частота n_i	3	1	1	1	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

Решение. Выборочную среднюю и «исправленное» среднее квадратическое отклонение найдем соответственно по формулам

$$\bar{x}_B = \frac{\sum n_i \cdot x_i}{n},\ s = \sqrt{\frac{\sum n_i \cdot (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1}}.$$

Подставим в эти формулы данные задачи:

$$\bar{x}_B = \frac{3\cdot 5 + 1\cdot 3 + 1\cdot 3 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 3}{9} = \frac{15+3+3+1+2+3}{9} = \frac{27}{9} = 3.$$

$$s = \sqrt{\frac{3\cdot(5-3)^2 + 1\cdot(3-3)^2 + 1\cdot(3-3)^2 + 1\cdot(1-3)^2 + 2\cdot(1-3) + 1\cdot(3-3)^2}{9-1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3\cdot 2^2 + 1\cdot 0^2 + 1\cdot 0^2 + 1\cdot(-2)^2 + 2(-2)^2 + 1\cdot(0)^2}{8}} = \sqrt{\frac{24}{8}} = 1{,}7.$$

Таким образом, получим $\overline{x_B}$ =3, s = 1,7.

Найдем искомый доверительный интервал:

$$\bar{x}_B - t_\gamma \cdot s/\sqrt{n} < a < \bar{x}_B + t_\gamma \cdot s/\sqrt{n}.$$

Значение t_γ находят по таблице приложения 3 по заданным n = 9 и γ=0,95: t_γ =2,31.

Подставляя $\bar{x}_B = 3; t_\gamma = 2{,}31;$ s = 1,7; n = 9; получим

$$3 - 2{,}31\cdot 1{,}7/\sqrt{9} < a < 3 + 2{,}31\cdot 1{,}7/\sqrt{9},$$

$1{,}691 < a < 4.309$.

Получили доверительный интервал (1,7; 4,3), покрывающий неизвестное математическое ожидание a с надежностью $\gamma = 0{,}95$.

Пример 2. По данным выборки объема n = 40 из генеральной совокупности найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение s =1 нормально распределенного количественного признака. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,99.

Решение. Задача сводится к отысканию доверительного интервала
$s\cdot(1 - q) < \sigma < s\cdot(1 + q)$ (если $q < 1$) или

$0 < \sigma < s\cdot(1 + q)$ (если $q > 1$).

Значение q находят по таблице приложения 4 по заданным n=40 и γ=0,99: q=0,35.

Так как $q = 0{,}35 < 1$, то воспользуемся первым соотношением. Подставим $s = 1$ и $q = 0{,}35$.

Получим $1\cdot(1 - 0{,}35) < \sigma < 1\cdot(1 + 0{,}35)$, отсюда $0{,}65 < \sigma < 1{,}35$.

Таким образом, полученный доверительный интервал $0{,}65 < \sigma < 1{,}35$ покрывает неизвестное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью (доверительной вероятностью) $\gamma = 0{,}99$.

ПЕРЕЧЕНЬ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ

1. Классическая вероятность, ее свойства.
2. Геометрическая вероятность, ее свойства.
3. Статистическая вероятность, ее свойства.
4. Сумма событий. Теорема сложения вероятностей 2-х произвольных событий, следствия.
5. Условная вероятность. Теорема умножения, следствия из нее.
6. Обобщенная теорема умножения, следствия из нее.

10. Полная вероятность. Формулы Байеса.
11. Схема независимых испытаний Бернулли. Формула Бернулли с выводом.
12. Локальная теорема Муавра-Лапласа.
13. Теорема Пуассона.
14. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Свойства функции Ф(х).
15. Следствие интегральной теоремы Муавра-Лапласа.
16. Случайные величины (СВ), примеры. Дискретные и непрерывные СВ.
17. Закон распределения дискретной СВ.
18. Функция распределения СВ, ее свойства.
19. Плотность распределения вероятностей непрерывной СВ, ее свойства.
20. Вероятностный смысл плотности распределения СВ.
21. Математическое ожидание СВ, его свойства и вероятностный смысл.
22. Дисперсия. Формула для вычисления дисперсии. Среднее квадратическое отклонение.
23. Свойства дисперсии.
24. Законы распределения и их характеристики:
    а) биномиальный; б) Пуассона; в) равномерный; г) показательный; д) нормальный.
25. Выборочный метод. Генеральная совокупность. Выборка, требования к ней. Способы отбора.
26. Статистическое распределение выборки. Характеристики вариационного ряда.
27. Эмпирическая функция распределения, ее свойства.
28. Графическое изображение выборочных данных: полигон частот, гистограмма.
29. Статистические оценки параметров распределения, требования к ним. Точечные и интервальные оценки.
30. Генеральная и выборочная средние. Точечная оценка генеральной средней.
31. Генеральная, выборочная и исправленная дисперсии. Точечные оценки дисперсии.
32. Формула для вычисления дисперсии.
33. Интервальные оценки. Точность и надежность оценки. Доверительный интервал.
34. Интервальные оценки для параметров нормального распределения.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература				
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Количество
1	Колемаев, В.А., Калинина, В.Н.	Теория вероятностей и математическая статистика: учебник	Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2017	ЭБС
2	Гмурман, В.Е.	Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов	М.: Высш. шк., 2002	139
Дополнительная литература				
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Количество
1	Ермаков Валерий Иванович	Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие	Москва: ООО "Научно-издательский центр ИНФРА-М", 2004	ЭБС
2	Горлач, Б.А.	Теория вероятностей и математическая статистика	Лань, 2013	ЭБС
Методические разработки				
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Количество
1	И.Н. Нурутдинова, Д.А. Пожарский	Статистическая обработка результатов эксперимента: учебное пособие	ДГТУ, 2011	ЭБС
2	В.И. Полтинников, Д.А. Пожарский	ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА: учебное пособие	ДГТУ, 2016	ЭБС
Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"				
1	Электронная библиотечная система НТБ ДГТУ: http://ntb.donstu.ru/			

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3865	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3104	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1513
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957

1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0043
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0004

3,7	**0004**	**0004**	**0004**	**0004**	**0004**	**0004**	**0003**	**0003**	**0003**	**0003**
3,8	**0003**	**0003**	**0003**	**0003**	**0003**	**0002**	**0002**	**0002**	**0002**	**0002**
3,9	**0002**	**0002**	**0002**	**0002**	**0002**	**0002**	**0002**	**0002**	**0001**	**0001**

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	Ф(*x*)	*x*	Ф(*x*)	*x*	Ф(*x*)	*x*	Ф(*x*)
0,00	0,0000	0,25	0,0987	0,50	0,1915	0,75	0,2734
0,01	0,0040	0,26	0,1026	0,51	0,1950	0,76	0,2764
0,02	0,0080	0,27	0,1064	0,52	0,1985	0,77	0,2794
0,03	0,0120	0,28	0,1103	0,53	0,2019	0,78	0,2823
0,04	0,0160	0,29	0,1141	0,54	0,2054	0,79	0,2852
0,05	0,0199	0,30	0,1179	0,55	0,2088	0,80	0,2881
0,06	0,0239	0,31	0,1217	0,56	0,2123	0,81	0,2910
0,07	0,0279	0,32	0,1255	0,57	0,2157	0,82	0,2939
0,08	0,0319	0,33	0,1293	0,58	0,2190	0,83	0,2967
0,09	0,0359	0,34	0,1331	0,59	0,2224	0,84	0,2995
0,10	0,0398	0,35	0,1368	0,60	0,2257	0,85	0,3023
0,11	0,0438	0,36	0,1406	0,61	0,2291	0,86	0,3051
0,12	0,0478	0,37	0,1443	0,62	0,2324	0,87	0,3078
0,13	0,0517	0,38	0,1480	0,63	0,2357	0,88	0,3106
0,14	0,0557	0,39	0,1517	0,64	0,2389	0,89	0,3133
0,15	0,0596	0,40	0,1554	0,65	0,2422	0,90	0,3159
0,16	0,0636	0,41	0,1591	0,66	0,2454	0,91	0,3186
0,17	0,0675	0,42	0,1628	0,67	0,2486	0,92	0,3212

0,18	**0,0714**	**0,43**	**0,1664**	**0,68**	**0,2517**	**0,93**	**0,3238**
0,19	**0,0753**	**0,44**	**0,1700**	**0,69**	**0,2549**	**0,94**	**0,3264**
0,20	**0,0793**	**0,45**	**0,1736**	**0,70**	**0,2580**	**0,95**	**0,3289**
0,21	**0,0832**	**0,46**	**0,1772**	**0,71**	**0,2611**	**0,96**	**0,3315**
0,22	**0,0871**	**0,47**	**0,1808**	**0,72**	**0,2642**	**0,97**	**0,3340**
0,23	**0,0910**	**0,48**	**0,1844**	**0,73**	**0,2673**	**0,98**	**0,3365**
0,24	**0,0948**	**0,49**	**0,1879**	**0,74**	**0,2703**	**0,99**	**0,3389**
1,00	**0,3413**	**1,28**	**0,3997**	**1,56**	**0,4406**	**1,84**	**0, 4671**
1,01	**0,3438**	**1,29**	**0,4015**	**1,57**	**0,4418**	**1,85**	**0, 4678**
1,02	**0,3461**	**1,30**	**0, 4032**	**1,58**	**0,4429**	**1,86**	**0,4686**
1,03	**0,3485**	**1,31**	**0,4049**	**1,59**	**0,4441**	**1,87**	**0,4693**
1,04	**0,3508**	**1,32**	**0,4066**	**1,60**	**0,4452**	**1,88**	**0,4699**
1,05	**0,3531**	**1,33**	**0,4082**	**1,61**	**0,4463**	**1,89**	**0,4706**
1,06	**0,3554**	**1,34**	**0,4099**	**1,62**	**0,4474**	**1,90**	**0,4713**
1,07	**0,3577**	**1,35**	**0,4115**	**1,63**	**0,4484**	**1,91**	**0,4719**
1,08	**0,3599**	**1,36**	**0,4131**	**1,64**	**0,4495**	**1,92**	**0,4726**
1,09	**0,3621**	**1,37**	**0,4147**	**1,65**	**0,4505**	**1,93**	**0,4732**
1,10	**0,3643**	**1,38**	**0,4162**	**1,66**	**0,4515**	**1,94**	**0,4738**
1,11	**0,3665**	**1,39**	**0,4177**	**1,67**	**0,4525**	**1,95**	**0,4744**
1,12	**0,3686**	**1,40**	**0,4192**	**1,68**	**0,4535**	**1,96**	**0,4750**
1,13	**0,3708**	**1,41**	**0,4207**	**1,69**	**0,4545**	**1,97**	**0,4756**
1,14	**0,3729**	**1,42**	**0,4222**	**1,70**	**0,4554**	**1,98**	**0,4761**

1,15	**0,3749**	**1,43**	**0,4236**	**1,71**	**0,4564**	**1,99**	**0,4767**
1,16	**0,3770**	**1,44**	**0,4251**	**1,72**	**0,4573**	**2,00**	**0,4772**
1,17	**0,3790**	**1,45**	**0,4265**	**1,73**	**0,4582**	**2,02**	**0,4783**
1,18	**0,3810**	**1,46**	**0,4279**	**1,74**	**0,4591**	**2,04**	**0,4793**
1,19	**0,3830**	**1,47**	**0,4292**	**1,75**	**0,4599**	**2,06**	**0,4803**
1,20	**0,3849**	**1,48**	**0,4306**	**1,76**	**0,4608**	**2,08**	**0,4812**
1,21	**0,3869**	**1,49**	**0,4319**	**1,77**	**0,4616**	**2,10**	**0,4821**
1,22	**0,3883**	**1,50**	**0,4332**	**1,78**	**0,4525**	**2,12**	**0,4830**
1,23	**0,3907**	**1,51**	**0,4345**	**1,79**	**0,4633**	**2,14**	**0,4838**
1,24	**0,3925**	**1,52**	**0,4357**	**1,80**	**0,4641**	**2,16**	**0,4846**
1,25	**0,3944**	**1,53**	**0,4370**	**1,81**	**0,4649**	**2,18**	**0,4854**
1,26	**0,3962**	**1,54**	**0,4382**	**1,82**	**0,4656**	**2,20**	**0,4861**
1,27	**0,3980**	**1,55**	**0,4394**	**1,83**	**0,4664**	**2,22**	**0,4868**
2,24	**0,4875**	**2,48**	**0, 4934**	**2,72**	**0,4967**	**2,96**	**0,4985**
2,26	**0,4881**	**2,50**	**0,4938**	**2,74**	**0,4969**	**2,98**	**0,4986**
2,28	**0,4887**	**2,52**	**0,4941**	**2,76**	**0,4971**	**3,00**	**0,49865**
2,30	**0,4893**	**2,54**	**0,4945**	**2,78**	**0,4973**	**3,20**	**0,49931**
2,32	**0,4898**	**2,56**	**0,4948**	**2,80**	**0,4974**	**3,40**	**0,49966**
2,34	**0,4904**	**2,58**	**0,4951**	**2,82**	**0,4976**	**3,60**	**0,499841**
2,36	**0,4909**	**2,60**	**0,4953**	**2,84**	**0,4977**	**3,80**	**0,499928**
2,38	**0,4913**	**2,62**	**0,4956**	**2,86**	**0,4979**	**4,00**	**0,499968**
2,40	**0,4918**	**2,64**	**0,4959**	**2,88**	**0,4980**	**4,50**	**0,499997**

2,42 2,44 2,46	0,4922 0,4927 0,4931	2,66 2,68 2,70	0,4961 0,4963 0,4965	2,90 2,92 2,94	0,4981 0,4982 0,4984	5,00	0, 499997

Приложение 3

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

γ / n	0,95	0,99	0,999	γ / n	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374

18	**2,11**	**2,90**	**3,97**	∞	**1,960**	**2,576**	**3,291**
19	**2,10**	**2,88**	**3,92**				

Приложение 4

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

γ / n	**0,95**	**0,99**	**0,999**	γ / n	**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	**1,37**	**2,67**	**5,64**	**20**	**0,37**	**0,58**	**0,88**
6	**1,09**	**2,01**	**3,88**	**25**	**0,32**	**0,49**	**0,73**
7	**0,92**	**1,62**	**2,98**	**30**	**0,28**	**0,43**	**0,63**
8	**0,80**	**1,38**	**2,42**	**35**	**0,26**	**0,38**	**0,56**
9	**0,71**	**1,20**	**2,06**	**40**	**0,24**	**0,35**	**0,50**
10	**0,65**	**1,08**	**1,80**	**45**	**0,22**	**0,32**	**0,46**
11	**0,59**	**0,98**	**0,98**	**50**	**0,21**	**0,30**	**0,43**
12	**0,55**	**0,90**	**0,90**	**60**	**0,188**	**0,269**	**0,38**
13	**0,52**	**0,83**	**0,83**	**70**	**0,174**	**0,245**	**0,34**
14	**0,48**	**0,78**	**0,78**	**80**	**0,161**	**0,226**	**0,31**
15	**0,46**	**0,73**	**0,73**	**90**	**0,151**	**0,211**	**0,29**
16	**0,44**	**0,70**	**0,70**	**100**	**0,143**	**0,198**	**0,27**
17	**0,42**	**0,66**	**0,66**	**150**	**0,115**	**0,160**	**0,211**
18	**0,40**	**0,63**	**0,63**	**200**	**0,099**	**0,136**	**0,185**
19	**0,39**	**0,60**	**0,60**	**250**	**0,089**	**0,120**	**0,162**